

Séance du 17.12 (exercices)

①

$$\bar{v}_1 = \frac{\bar{w}_1}{\|\bar{w}_1\|}, \quad \bar{v}_2 = \frac{\bar{w}_2}{\|\bar{w}_2\|}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \|\bar{w}_1\| = \sqrt{2}$$

σ sont bornées par $\|A\bar{v}_1\|$ et $\|A\bar{v}_2\|$

① $\|A\bar{v}_1\| = \left\| \frac{A\bar{w}_1}{\|\bar{w}_1\|} \right\| = \left\| \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}}{\sqrt{2}} \right\|$

$$= \frac{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

② $\|A\bar{v}_2\| = \left\| \frac{A\bar{w}_2}{\|\bar{w}_2\|} \right\| = \left\| \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{3}} \right\| = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$

$$\boxed{\sigma_1 = \sqrt{\frac{5}{2}} \Rightarrow \sigma_2 = \sqrt{\frac{5}{3}}} \leftarrow \text{valeurs singulières}$$

$$\text{Taille de } A = 2 \times 4 \Rightarrow \text{Taille de } \Sigma = \text{Taille de } A = 2 \times 4$$

$$\Rightarrow \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{5}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{5}{3}} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = U \Sigma V^T = \begin{pmatrix} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{5}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{5}{3}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & & \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{2 \times 4} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{2 \times 2} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{4 \times 4}$

En plus

$$V = \begin{pmatrix} \bar{v}_1 & \bar{v}_2 & \bar{v}_3 & \bar{v}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a besoin de deux vecteurs ortho normés et $\perp$ à $\bar{v}_1$ et $\bar{v}_2$.

→ BON de $\text{Ker}(A^T A)$ ← d'après le lemme d'orthogonalité par les vecteurs propres d'une matrice symétrique
 $\{\bar{v}_3, \bar{v}_4\}$
i.e. $\bar{v}_3$ et $\bar{v}_4$ sont $\perp$ à $\bar{v}_1$ et $\bar{v}_2$

Méthode 1

Compléter $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ en une base de $\mathbb{R}^4$ et appliquer GS pour obtenir une BON de $\mathbb{R}^4$.

Pourquoi on cherche $\{\bar{v}_3, \bar{v}_4\}$ t.q. soient $\perp$ à $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$?

① Les colonnes de V forment une BON de vecteurs propres de $A^T A$.

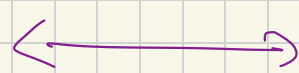
② Les valeurs singulières positives de $A \equiv \sqrt{\text{valeurs propres } > 0 \text{ de } A^T A}$

(avec même multiplicité)

(Les autres valeurs propres de $A^T A$ sont 0!)

Notre cas

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{5}{2}} \text{ et } \sigma_2 = \sqrt{\frac{5}{3}}$$



$$\lambda_1 = \frac{5}{2}, \lambda_2 = \frac{5}{3}$$

valeurs propres > 0 de $A^T A$
il reste la valeur propre nulle de $A^T A$

Alors les $\bar{v}_3$ et $\bar{v}_4$ à calculer sont dans l'espace propre de $A^T A$ de valeur propre 0.

$\Rightarrow$

$\bar{v}_3, \bar{v}_4$ sont $\perp$ à $\bar{v}_1, \bar{v}_2$

Comme $A^T A$ symétrique
et $0 \neq \lambda_1, \lambda_2$

$\{ \bar{v}_3, \bar{v}_4 \}$ BON de Vect $\{ \bar{v}_1, \bar{v}_2 \}$

$$B = (\bar{v}_1 \bar{v}_2) \Rightarrow \boxed{\text{base de } \text{Ker}(B^T)} = \boxed{\text{base de } \text{Vect}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}}$$

Dans ce cas, on veut une BON de FER

$$\text{Ker} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : \begin{array}{l} x_1 = -x_3/2 \\ x_2 = -x_3/2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -x_3/2 \\ -x_3/2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 0 \end{pmatrix}}_{\bar{v}_3} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\bar{v}_4}$

→ Voir le calcul de U dans le corrigé d'exercice 8 de la série 14.

$$B = (\bar{v}_1 \bar{v}_2) \Rightarrow \boxed{\text{base de } \text{Ker}(B^T)} = \boxed{\text{base de } \text{Vect}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}}$$

Dans ce cas, on veut une BON de FIR

$$\text{Ker} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : \begin{array}{l} x_1 = -x_3/2 \\ x_2 = -x_3/2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -x_3/2 \\ -x_3/2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\bar{v}_3$ $\bar{v}_4$

→ Voir le calcul de U dans le corrigé d'exercice 8 de la série 14.